



XXXII Convegno Nazionale di Idraulica e costruzioni Idrauliche
Palermo, 14-17 settembre 2010

RELAZIONE GENERALE C

LA MODELLAZIONE IDRAULICA DEI FLUIDI BIFASICI SOLIDO LIQUIDO

A. Armanini¹

(1) Dipartimento di Ingegneria Civile e Ambientale, Università di Trento, Italia, e-mail:
aronne.armanini@unitn.it

SOMMARIO

Si propone una rivisitazione delle teorie bifasiche solido-fluido, applicate alle correnti idriche, con particolare riferimento alle correnti gravitazionali che interessano gli alvei a forte pendenza. Viene posta particolare enfasi al problema della coesistenza del regime frizionale e del regime collisionale. Nella nota si riportano anche alcuni riscontri sperimentali delle più recenti teorie su questo particolare punto.

1 INTRODUZIONE

Da sempre gli ingegneri idraulici operanti nel settore fluviale, ma non solo, hanno dovuto affrontare il problema della coesistenza nel campo di moto di una fase liquida e di una fase solida.

Fintanto che il problema si è limitato al trasporto di sedimenti in ambito fluviale la questione del trasporto dei solidi è stato risolto con formule, procedimenti e teorie ad hoc.

Solo recentemente il cresciuto interesse per le correnti iperconcentrate ed in particolare la pressione esercitata sulla comunità scientifica e sulla pubblica opinione da sempre più frequenti eventi catastrofici di colate detritiche e di fango hanno spinto la ricerca verso una maggior comprensione dei meccanismi di interazione tra la fase fluida e la fase solida delle correnti.

Con riferimento al problema della sicurezza idrogeologica si sente sempre di più la necessità e l'urgenza di disporre di strumenti convincenti dal punto di vista della fisica, e sempre più affidabili per i risultati, in grado di risolvere il problema della predizione della pericolosità associata a questi eventi e in grado di stimare l'efficienza delle opere di protezione.

Purtroppo l'urbanizzazione ha interessato in tempi relativamente recenti anche aree considerate nel passato come marginali, oggi densamente popolate e sede di importanti infrastrutture, collocate subito a valle di versanti potenzialmente instabili, e potenzialmente soggette al pericolo di colata di detriti. La frequenza di questi eventi sembra crescere con il tempo. Con riferimento agli ultimi tre decenni e relativamente al nostro paese si ricordano gli eventi di cui chi scrive può dare testimonianza diretta: Stava luglio 1985, Valtellina estate 1987, Versilia giugno 1996, Piemonte, Liguria e Valle d'Aosta ottobre 2000, Valle di Sarno maggio

1998, Ischia 2006, Massa Carrara settembre 2003, Villar Pellice - Piemonte maggio 2008, Cancia - Cadore luglio 2009, Messina ottobre 2009, Casamicciola – Ischia novembre 2009.

In particolare a partire dall'evento del 1987 che colpì la Valtellina la comunità scientifica italiana attraverso le unità Operative del gruppo Nazionale della Catastrofi ha iniziato ad investire nella ricerca per cercare di capire meglio la dinamica di questi fenomeni e per mettere a punto strumenti operativi che ne riducessero la pericolosità (Seminara e Tubino, 1993; Armanini, 1997; Armanini *et al.*, 2005 b).

I fenomeni di colata detritica e di fango non sono certamente fenomeni recenti, ma nel passato interessavano maggiormente aree marginali dal punto di vista economico ed insediativo. Erano fenomeni peraltro ben noti ai responsabili delle sistemazioni dei torrenti che hanno cercato di controllarli con diverse tipologie di opere di sistemazione. L'approccio a questi fenomeni è stato nel passato condotto soprattutto con una buona dose di empirismo e la ricerca era orientata più a metodi classificatori e descrittivi più che cercare di capirne la natura fisica. Esiste ancora oggi una terminologia assai variegata per descriverli non solo nella letteratura tecnica italiana. In un recente volume dedicato ai *Debris-flows hazard and related phenomena*, Hungr Oldrich (2005) che di questi fenomeni è uno dei maggiori conoscitori viventi dedica un capitolo alla terminologia ed individua almeno 10 tipi di colata. Tamotsu Takahshi (1991) nel suo celebre libro ne individua almeno 4, per ciascuno dei quali propone una specifica legge reologica.

Da questo punto di vista appare quanto mai urgente una semplificazione concettuale, volta a ridurre le soggettività classificatorie e che cerchi invece di descriverne il comportamento sulla base di precisi principi della fisica.

Dal punto di vista fisico una strada per semplificare il problema è quella di trattare le colate di detriti come correnti iperconcentrate composte da due fluidi. Il liquido interstiziale, che obbedisce alle leggi della meccanica dei fluidi e che deve essere trattato con la sua propria reologia, ed un fluido granulare che compone la fase solida, pure dotato di una sua legge reologica.

Per quanto attiene alla fase liquida, questa il più delle volte è acqua a temperatura pressoché costante che può essere trattata come un fluido newtoniano e che quindi obbedisce alle equazioni di Navier-Stokes. Spesso tuttavia si preferisce considerare le particelle di dimensioni minori (orientativamente inferiori ai 30 μm) disperse nella fase liquida e quindi non sedimentabili e perciò trattare la mistura composta dall'acqua e dalle particelle sottili come un fluido omogeneo. Bisogna in questo caso distinguere tra limi ed argille. Nel caso dei limi, se la loro concentrazione non è elevatissima, la loro presenza non altera il carattere newtoniano del fluido interstiziale, mentre nel caso delle argille, anche a concentrazioni relativamente basse, la miscela risultante ha evidenti caratteristiche di fluido binghamiano.

Tralasciando il caso di sedimenti coesivi, la fase solida è rappresentata dai

sedimenti di dimensioni maggiori o uguali a **quelli** delle sabbie sottili e può essere trattata come un *fluido granulare*. Nell'ipotesi che il numero di particelle che occupa il volume di riferimento sia sufficientemente grande (ossia che la dimensione delle particelle sia sufficientemente piccola rispetto al volume di riferimento considerato come infinitesimo), l'insieme delle particelle viene assimilato ad un mezzo fluido continuo dotato di una propria legge reologica in grado di descriverne l'interazione tra le particelle. È evidente che questo approccio diventa problematico in presenza di sedimenti di grandi dimensioni, ossia con dimensioni confrontabili con quelle dei contorni del moto, tuttavia i vantaggi che questo modo di inquadrare il fenomeno comporta sono grandi pur con i limiti di cui sopra.

La teoria dei fluidi granulari è stata proposta per la prima volta da Bagnold [1954] ed è stata quindi perfezionata dall'introduzione delle *teorie cinetiche* [Savage and Jeffrey 1981; Jenkins and Savage, 1983] derivate appunto dalla teoria cinetica dei gas.

2 EQUAZIONI DEI FLUIDI BIFASICI LIQUIDO-GRANULARE

Poiché non c'è scambio di massa tra le due fasi, le equazioni di conservazione della massa e della quantità di moto della fase liquida sono (Truesdell, 1984):

$\frac{\partial \rho^f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho^f u_i^f) = 0$	1)
$\frac{\partial}{\partial t} (\rho^f u_i^f) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho^f u_i^f u_j^f) = \rho^f g_i^f + \frac{\partial T_{ij}^f}{\partial x_j} + F_i^f$	

nelle quali ρ^f rappresenta la densità della fase liquida, ossia $\rho^f = (1-c)\rho_w$, dove c è la concentrazione di volume della fase solida e ρ_w è la densità materiale del liquido interstiziale. u_i^f è la componente generica del vettore velocità della fase liquida. F_i^f rappresenta invece la componente della forza (per unità di volume) di interazione tra la fase liquida e quella solida. T_{ij}^f è la componente del tensore degli sforzi della fase liquida. g_i^f la componente delle forze di massa (per unità di volume) che agiscono sulla fase liquida.

In maniera del tutto analoga si possono scrivere in tutta generalità le equazioni del moto della fase granulare (Iverson, 1997):

$\frac{\partial \rho^g}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho^g u_i^g) = 0$	2)
$\frac{\partial}{\partial t} (\rho^g u_i^g) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho^g u_i^g u_j^g) = \rho^g g_i^g + \frac{\partial T_{ij}^g}{\partial x_j} + F_i^g$	

Analogamente alle definizioni relative alla fase liquida, qui ρ^g rappresenta la densità della fase granulare, ossia $\rho^g = c\rho_s$, dove ρ_s è la densità materiale delle particelle. u_i^g è la componente del vettore velocità della fase granulare. F_i^g rappresenta la componente generica della forza (per unità di superficie) di interazione tra la fase granulare e quella liquida, per cui $F_i^g = -F_i^f$.

T_{ij}^g è la componente del tensore degli sforzi della fase granulare. g_i^g è la componente generica della forza di massa (per unità di volume) che agisce sulla fase granulare. Nei moto governati dalla gravità le forze di massa (per unità di volume) per entrambe le fasi sono costituite dal vettore accelerazione di gravità, per cui $g_i^g = g_i^f = -g(\partial z / \partial x_i)$, dove z rappresenta la direzione della verticale ascendente.

2.1 Reologia della fase granulare

La reologia della fase granulare può essere ricondotta sostanzialmente a due modalità di interazione tra le particelle, i contatti quasi istantanei ed i contatti prolungati nel tempo. I due regimi sono stati identificati (Bagnold, 1954; Jenkins and Savage, 1983; Campbell, 1990; Goldhirsch, 2003; Forterre and Pouliquen, 2008) rispettivamente come *regime collisionale*, e come *regime frizionale* (o *quasi statico*).

Come verrà meglio chiarito nel seguito, si assume in genere che gli sforzi corrispondenti ai due regimi si possano sommare linearmente tra di loro (Savage, 1983; Johnson and Jackson, 1987). Secondo alcuni autori (Meruane *et al.*, 2010) i due regimi sono sostanzialmente stratificati, per cui sono fisicamente separati. Indagini sperimentali recenti (Armanini *et al.* 2009) hanno invece mostrato come i due regimi si possano alternare nel tempo e nello spazio con un meccanismo di intermittenza simile a quello che esiste nello strato limite di parete tra il sottostrato viscoso e il sottostrato di turbolenza di parete.

In entrambe le ipotesi ed con tutta generalità si può pertanto porre:

$T_{ij}^g = T_{ij}^{g-coll} + T_{ij}^{g-fric}$	3)
--	----

Si tratta ora di definire una appropriata legge reologica per i due regimi. La parte collisionale del tensore è sensibilmente legata alla velocità di deformazione, mentre la parte frizionale sembra essere indipendente dalla velocità di deformazione.

Prima di entrare nel dettaglio della reologia, conviene affrontare il problema di come esplicitare le forze di interazione tra le due fasi.

2.1.1 Le forze di interazione tra le due fasi

La forza per unità di volume $F_i^g = -F_i^f$ rappresenta la forza esercitata dalla fase liquida su quella granulare. Questa forza è stata oggetto di interpretazioni non del tutto coincidenti.

Conviene anzitutto separare questa forza in una parte dovuta agli sforzi normali, p^{g-f} , e una parte riconducibili a sforzi tangenziali τ_{ij}^{g-f} :

$$F_i^g = -c \frac{\partial p^{g-f}}{\partial x_i} + c \frac{\partial \tau_{ij}^{g-f}}{\partial x_j} \quad 4)$$

In particolare sulla natura del primo termine sono state fatte diverse congetture. Meruane *et al.* (2010) arrivano alla conclusione che questa pressione debba essere la pressione della fase fluida, ossia sia direttamente riferita alle forze di galleggiamento.

Il secondo termine è dovuto agli sforzi che si hanno nel moto relativo tra i grani ed il fluido interstiziale, questi sforzi possono essere ricondotti alla forza di resistenza idrodinamica, anche se altri effetti come la massa aggiunta e la forza di Basset possono essere presenti. La forza di resistenza idrodinamica può essere espressa attraverso un coefficiente di resistenza funzione del numero di Reynolds della fase fluida Re_p , del fattore di forma delle particelle, S_F , e della scabrezza relativa delle particelle e_s/D : $C_D = fct(Re_p, S_F, e_s/D)$. Il numero di Reynolds della fase fluida è scritto in funzione della differenza di velocità tra le due fasi, $Re_p = (1-c)d_p |\mathbf{u}^f - \mathbf{u}^g| / \nu_f$, dove ν_f è il coefficiente di viscosità cinematica della fase fluida. La dipendenza dal fattore di forma e dalla scabrezza relativa non viene invece presa in considerazione in questo contesto. In definitiva, si ha:

$$F_i^g = -c \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{3}{4} C_D \frac{\rho_w}{d_p} (1-c)^{1-m} c (u_i^f - u_i^g) |\mathbf{u}^f - \mathbf{u}^g| \quad 5)$$

nella quale l'esponente m assume valori che variano da 2.6 (per il regime viscoso) a 2.7 (per il regime di scia turbolenta), \mathbf{u}^f e \mathbf{u}^g sono i vettori velocità di ciascuna delle due fasi.

2.2 Reologia della fase fluida

La reologia della fase fluida dipende dal tipo di fluido. Nel caso di acqua o di altro fluido newtoniano, essa è data dal tensore degli sforzi newtoniani:

$$T_{ij}^f = -p \delta_{ij} + \mu_w \left(\frac{\partial u_i^f}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^f}{\partial x_i} \right) \quad 6)$$

Qui δ_{ij} rappresenta la funzione di Kronecker.

In presenza di particelle coesive di piccola dimensione, conviene, come si è detto, trattare il fluido interstiziale come un fluido omogeneo non newtoniano. Molto usato a questo scopo è lo schema del fluido di Hershel-Bulkley (Coussot, 1997; Ancy, 2007).

2.3 Reologia della fase granulare

Uno dei primi schemi concettuali proposti per la meccanica dei fluidi granulari è il modello delle *pressioni dispersive*, proposto da Bagnold nel 1954. La teoria di Bagnold presenta dei limiti anche concettuali, che sono stati analizzati in dettaglio nella letteratura anche recente (Hunt *et al.*, 2002). Questa teoria ha tuttavia il pregio della semplicità e di essere stata la prima ad aver indicato chiaramente la fisica del fenomeno; inoltre essa è stata ampiamente applicata ai miscugli granulari governati dalla gravità in generale ed alle colate di detriti in particolare.

2.3.1 Modello di Bagnold per il regime collisionale

Secondo Bagnold gli urti tra le particelle mediati nel tempo concorrono a formare una pressione *dispersiva* nel campo di moto che dipende sostanzialmente dalla distanza media relativa tra i grani. Per descrivere questa distanza Bagnold ha introdotto la concentrazione lineare λ , che con riferimento a particelle sferiche uniformemente distribuite, è rappresentata dal rapporto tra il diametro della particella d_p e la distanza media s tra le particelle $\lambda = d_p / s$ (Figura 1).

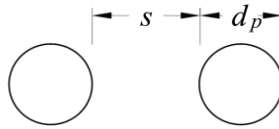


Figura 1. Definizione di concentrazione lineare: $\lambda = d_p / s$.

Per le particelle sferiche la concentrazione lineare è legata alla *concentrazione di volume* c dalla seguente relazione:

$$\lambda = \frac{c^{1/3}}{c_*^{1/3} - c^{1/3}} \quad 7)$$

dove c_* è la concentrazione di volume massima possibile, *concentrazione di massimo impaccamento*, che si ottiene ponendo le sfere nella disposizione cosiddetta a *palle di cannone*. In questo caso $c_* = \pi/3/\sqrt{2} = 0.74$.

Sulla base di misure sperimentali fatte in un viscosimetro con particelle sferiche leggere, Bagnold è giunto alla conclusione che per velocità di deformazione sufficientemente elevate la relazione tra la pressione dispersiva e velocità di deformazione è di tipo quadratico ed è esprimibile, per un moto piano (x_1, x_2) quasi-unidirezionale in x_1 con la seguente relazione:

$$p^{g-coll} = a \cos \phi \rho_s \left(\lambda d_p \frac{\partial u_1^g}{\partial x_2} \right)^2 \quad 8)$$

dove ϕ rappresenta l'angolo di *attrito dinamico* che secondo Bagnold si mantiene sensibilmente costante in questo regime. a rappresenta una costante sperimentale (secondo le esperienze di Bagnold $a = 0.042$). Il regime di moto delle particelle

che si presenta in queste condizioni è stato chiamato da Bagnold *regime grano-inerziale*. Secondo il modello bagnoldiano dunque la pressione dispersiva dipende dalla velocità di deformazione. È evidente che questa ipotesi non è generalizzabile, perché è facile immaginare moti dotati di pressioni dispersive non legate ai gradienti di velocità.

La pressione dispersiva induce a sua volta (o meglio è indotta da) uno sforzo tangenziale dispersivo, legato alla pressione dispersiva da una relazione di tipo coulombiano:

$$\tau_{12}^{g-coll} = a \sin \phi \rho_s \left(\lambda d_p \frac{\partial u_1^g}{\partial x_2} \right)^2 \quad (9)$$

Si noti che il rapporto tra lo sforzo tangenziale e quello normale è di tipo coulombiano:

$$\frac{\tau_{12}^{g-coll}}{p^{g-coll}} = \tan \phi \quad (11)$$

Anche questo punto verrà meglio chiarito nel seguito.

2.3.2 Modelli cinetici per il regime collisionale

Si può facilmente dimostrare (Armanini *et al.*, 2008) che la teoria di Bagnold, applicata ai moto gravitativi uniformi di misture granulari in acqua, comporta che la concentrazione debba essere costante lungo il tirante. È questa una palese incongruenza, poiché le osservazioni sperimentali mostrano che le concentrazioni variano dal valore c_* di massimo impaccamento fino a concentrazioni prossime allo zero in prossimità della superficie libera (Armanini *et al.*, 2005 a).

Questo limite è stato superato con l'introduzione delle teorie cinetiche dei fluidi granulari (Jenkins & Savage, 1983; Haff, 1983; Lun *et al.* 1984; Jenkins & Richman, 1985) derivata dalla teoria cinetica dei gas. Secondo questa impostazione il moto delle particelle viene assimilato a quello delle molecole di un gas perfetto. Il concetto di temperatura del gas è sostituito da quello di temperatura granulare, Θ^g , definita come:

$$\Theta^g = \frac{1}{3} \langle u_i^p u_i^p \rangle \quad (12)$$

nella quale il simbolo $\langle \rangle$ rappresenta la media effettuata su tutte le particelle localizzate in un certo istante all'interno di un volume di controllo sufficientemente grande rispetto alla dimensione delle particelle, ma sufficientemente piccolo rispetto alle dimensioni dei contorni del moto. Le $u_i^p = u_i^p - \langle u_i^p \rangle$ rappresentano le componenti delle fluttuazioni del vettore velocità, mentre le $\langle u_i^p \rangle = u_i^g$ rappresentano le componenti della velocità mediata. Il moto in questo caso è caratterizzato da continue collisioni parzialmente elastiche tra le particelle. La dissipazione di energia avviene per urto tra corpi non perfettamente

elastici e come tale dipende dalla costante di restituzione elastica delle collisioni tra le particelle. È evidente che la temperatura granulare varia nello spazio e nel tempo e che essa rappresenta l'energia cinetica del moto collisionale delle particelle e che si dovrà imporre quindi il bilancio di questa energia.

Gli sforzi determinati dalle collisioni delle particelle sono stati ottenuti per via teorica da Jenkins & Hanes (1998) a partire dalle teorie cinetiche dei gas. La legge reologica relativa agli sforzi di natura collisionale può essere scritta in tutta generalità (Chapman & Cowling 1971) nella seguente forma:

$$T_{ij}^{g-coll} = -p^{g-coll} \delta_{ij} + \mu^{g-coll} \left(\frac{\partial u_i^g}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^g}{\partial x_i} \right) \quad (13)$$

T_{ij}^c è la componente collisionale del tensore degli sforzi della fase granulare. p^{g-coll} è la pressione isotropa collisionale della fase granulare, che viene fatta dipendere sostanzialmente dalla temperatura granulare:

$$p^{g-coll} = f_1 \rho_s \Theta^g \quad (14a)$$

dove f_1 è una funzione della concentrazione di volume che dipende dalla meccanica delle collisioni, anche questo ottenuto per via teorica in analogia con la teoria cinetica dei gas opportunamente adattata ad urti tra sfere elastiche di volume finito (Lun e Savage, 1986):

$$f_1 = c(1 + 4c_s g_o) \quad (14b)$$

Il coefficiente di viscosità della stessa fase, μ^{g-coll} , viene espresso utilizzando come velocità scala la radice della temperatura granulare, $(\Theta^g)^{0.5}$, e come lunghezza scala il diametro delle particelle d_p :

$$\mu^{g-coll} = f_2 \rho_s \sqrt{\Theta^g} d_p \quad (15)$$

Nelle due relazioni g_o è la *funzione di distribuzione radiale*, che tiene conto del fatto che nel calcolo della probabilità di collisione tra due particelle il volume utile circostante la prima particella viene ridotto a causa della presenza della seconda particella (Carnahan & Starling, 1979). Per questa funzione sono state proposte diverse formulazioni che differiscono tra di loro soprattutto alle concentrazioni elevate dove la teoria cinetica dovrebbe perdere di validità. Tra queste, l'espressione proposta da Lun e Savage (1986) sembra, anche alla luce dei risultati sperimentali (Armanini *et al.*, 2009), essere particolarmente adatta alle correnti granulari a concentrazione elevata di particelle pesanti in acqua:

$$g_o(c_s) = \frac{1}{(1 - c/c^*)^{2.5c^*}} \quad (16)$$

Anche f_2 è una opportuna funzione della concentrazione di volume che dipende dalla meccanica delle collisioni. Anche per questa viene proposta l'espressione proposta da Lun e Savage (1986), che dovrebbe essere valida anche

per concentrazioni prossime a quella di massimo impaccamento:

$$f_2 = \frac{5\pi^{1/2}}{96\eta_p(2-\eta_p)} \left(1 + \frac{8}{5} g_o c \eta_p \right) \left(\frac{1}{g_o} + \frac{8}{5} c \eta_p (3\eta_p - 2) \right) + \frac{8}{5\pi^{1/2}} \eta_p c^2 g_o \quad (17)$$

$\eta_p = (1+e)/2$ è un parametro che dipende dal coefficiente di restituzione elastica e_p delle particelle. Nella maggior parte delle applicazioni il coefficiente e_p è mantenuto costante. Armanini *et al.*, (2009) hanno invece fatto osservare che e_p dipende in maniera sensibile dal numero di Stokes, ed hanno proposto la seguente relazione:

$$e_p = 0.9 - 2.85 \text{St}^{-0.5} \quad (18a)$$

Il numero di Stokes da inserire nella relazione precedente è riferito alla temperatura granulare delle particelle:

$$\text{St} = \frac{1}{18} \frac{\rho_s d_p \Theta^{0.5}}{\mu_w} \quad (18b)$$

Ai bilanci di quantità di moto e di massa, in questo caso, bisogna aggiungere il bilancio dell'energia cinetica della fase collisionale. Anche questa equazione è stata derivata in analogia dalla teoria cinetica dei gas, nella quale è stato modificato il termine della dissipazione, che qui risulta essere l'energia dissipata per urti parzialmente elastici:

$$\rho_s \left(\frac{\partial \Theta}{\partial t} + u_j^g \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k_\Theta \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} \right) + \mu_c \left(\frac{\partial u_i^g}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^g}{\partial x_i} \right)^2 - f_5 (1 - e_p^2) \rho_s \frac{\Theta^{3/2}}{d_p} \quad (19)$$

Il primo termine a sinistra rappresenta la variazione di energia cinetica del moto collisionale (di traslazione). Questa variazione è bilanciata dalla diffusione dell'energia cinetica legata all'agitazione delle particelle (primo termine a destra, nel quale k_Θ rappresenta il coefficiente di diffusione), dal lavoro degli sforzi tangenziali (secondo termine a destra) e dalla dissipazione legata alla parte anelastica degli urti (terzo termine, che infatti è nullo se gli urti sono perfettamente elastici, ossia per $e_p = 0$).

Il coefficiente di diffusione k_Θ è stato pure ricavato per via teorica in maniera analoga al coefficiente di viscosità:

$$k_\Theta = g_o f_4 \rho_s \sqrt{\Theta} d_p \quad (20)$$

con

$$f_4 = \frac{25\pi^{1/2}}{16\eta_p(41-33\eta_p)} \left(1 + \frac{12}{5} c g_o \eta_p \right) \left(\frac{1}{g_o} + \frac{12}{5} c \eta_p^2 (4\eta_p - 3) \right) + \frac{4}{\pi^{1/2}} c^2 g_o \eta_p \quad (21)$$

Per il coefficiente f_5 del termine diffusivo, sempre Lun e Savage (1986) hanno proposto la seguente espressione:

$$f_5 = \frac{12}{\pi^{1/2}} c^2 g_o (1 - e_p^2) \quad (22)$$

3 CORRENTI GRANULARI PIANE

Le precedenti equazioni del moto della fase fluida e di quella granulare hanno validità generale, rimangono tuttavia da definire le relazioni di chiusura del regime frizionale.

Uno schema soddisfacente di validità generale per questo regime non esiste ancora. Recentemente sono state proposte (Forterre and Pouliquen, 2008) alcune formulazioni generali di tipo tridimensionale valide sia per il regime collisionale sia per quello frizionale. Si ritiene tuttavia che questi schemi contengano ancora una certa dose di arbitrarietà e che manchino ancora di una convincente validazione sperimentale. Converrà allora restringere l'analisi alle correnti granulari piane.

3.1 Il modello cinetico per Produzione = Dissipazione

Nei moti quasi unidirezionali (nella direzione x_1) il termine di sinistra nel bilancio energetico (eq. 19) è generalmente trascurabile. Se si fa l'ulteriore ipotesi che anche la componente diffusiva sia trascurabile, il bilancio dell'energia si riduce all'uguaglianza tra il termine di produzione e il termine di dissipazione. Dopo avervi inserito anche l'eq. (14a), l'equazione dell'energia (eq. 19) diviene:

$$f_2 \rho_s \sqrt{\Theta} d_p \left(\frac{\partial u_1^g}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^g}{\partial x_1} \right)^2 = f_5 \rho_s \frac{\Theta^{3/2}}{d_p} \quad (23)$$

ossia, il rapporto tra la temperatura granulare e il termine di deformazione angolare dipende esclusivamente dalla concentrazione e dal coefficiente di restituzione elastica:

$$\frac{\Theta}{d_p^2 (\dot{\gamma})^2} = \frac{f_2}{f_5} \quad (24)$$

nella quale si è posto $\dot{\gamma} = \partial u_i^g / \partial x_j + \partial u_j^g / \partial x_i$, velocità di deformazione della fase granulare. Sostituendo le relazioni (17) e (22) nella precedente relazione (24), si ottiene appunto questa dipendenza. L'andamento dell'equazione (24) è riprodotto in Figura 2 per due diversi valori della costante di restituzione elastica. Si osserva per concentrazioni sufficientemente elevate, il termine di destra dell'eq. (24), tende a divenire costante.

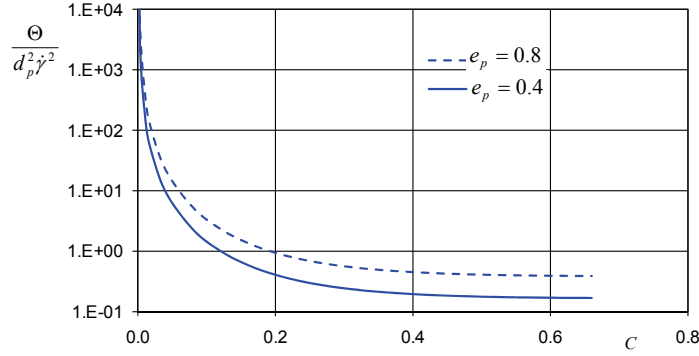


Figura 2. Dipendenza del rapporto $\Theta/[d_p \dot{\gamma}]^2$ dalla concentrazione nell'ipotesi di Produzione = Dissipazione nel bilancio dell'energia.

Si noti anche che in queste condizioni il rapporto tra lo sforzo tangenziale e la pressione presenta peculiarità analoghe:

$$\frac{\tau_{ij}^{g-coll}}{p^{g-coll}} = \frac{\mu^{g-coll} \dot{\gamma}}{p^{g-coll}} = \frac{f_2 \rho_s \sqrt{\Theta} d_p \dot{\gamma}}{\rho_s f_1 \Theta} = \frac{\sqrt{f_2 f_5}}{f_1} \quad (25)$$

Il rapporto, interpretato alla luce dello schema coulombiano, rappresenta il coefficiente di attrito dinamico. Anch'esso dipende dalla concentrazione e dal modulo di restituzione elastica e per concentrazioni sufficientemente elevate tende a divenire costante (Figura 3).

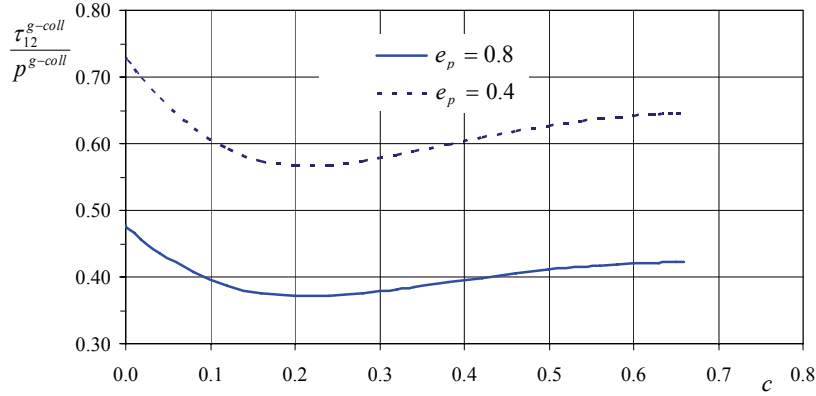


Figura 3. Dipendenza del rapporto coefficiente di attrito dinamico del regime collisionale dalla concentrazione, nell'ipotesi di Produzione = Dissipazione nel bilancio dell'energia con $e_p = \text{cost}$.

3.1.1 Modelli coulombiani per il regime frizionale

Il sistema delle equazioni da (13) a (22) definisce in maniera razionale la componente collisionale del moto granulare. Si apre ora il problema della reologia del regime frizionale. Questo aspetto è importante quando la concentrazione è sufficientemente elevata. In questo caso i contatti tra le particelle non sono più istantanei, ma divengono prolungati e possono coinvolgere più particelle simultaneamente. Nei flussi granulari di materiali pesanti governati dalla gravità, al di sotto del materiale in movimento si forma in genere (se le condizioni al contorno lo consentono) uno strato di materiale che non riesce a muoversi perché le forze di attrito tra i grani non lo consentono. Si dice che in questo caso il moto granulare è in equilibrio con il fondo mobile (Armanini *et. al.*, 2006). L'analisi sperimentale mostra appunto che il regime del moto granulare tende ad assumere un aspetto frizionale sempre più importante via via che ci si avvicina al fondo in equilibrio.

In uno dei primi lavori su questo aspetto Johnson e Jackson (1986) hanno osservato che mentre le teorie collisionali sono basate su una visione micro-strutturale del moto, i modelli costitutivi della componente frizionale degli sforzi sono ancora sostanzialmente empirici. Si può dire che a distanza di 24 anni la situazione non sia sostanzialmente cambiata. A differenza della reologia della parte fluida e di quella del regime collisionale, in letteratura esistono forme abbastanza diverse tra di loro per esprimere la reologia del regime frizionale.

Con una buona generalità per il regime frizionale si può assumere una legge reologica di tipo viscoplastico (Meruane *et al.*, 2010):

$$T_{ij}^{g-fric} = -p^{g-fric} \delta_{ij} + \tau_{ij}^{g-fric} \quad 26a)$$

nella quale p^{g-fric} rappresenta la pressione dovuta ai contatti permanenti tra le particelle. Si ipotizza fin d'ora che questa pressione dipenda dalla concentrazione della fase granulare. Il tensore degli sforzi corrispondenti ai contatti permanenti, τ_{ij}^{g-fric} , è invece riferibile ad uno schema di tipo coulombiano, ossia dipendente direttamente dalla “pressione frizionale”:

$$|\tau_{ij}^{g-fric}| = (1 - \delta_{ij}) p^{g-fric} \tan \phi^{fric} \quad 27)$$

ϕ^{fric} è l'angolo di attrito interno. Poiché la pressione p^{g-fric} dipende, come si è detto, dalla concentrazione delle particelle, bisognerà imporre che essa si annulli quando la concentrazione è tale per cui non esistono più contatti permanenti tra le particelle.

Il modello per la fase frizionale del moto proposto da Johnson e Jackson del 1986 è un modello coulombiano, nel quale, con riferimento ad un moto piano (x_1, x_2) , lo sforzo frizionale tangenziale viene scritto come:

$$|\tau_{12}^{g-fric}| = \sigma_2^{g-fric} \sin \phi \quad 28a)$$

σ_2^{g-fric} rappresenta lo sforzo normale (di compressione) dovuto alla sola parte frizionale.

In particolare per questo sforzo i due autori propongono una relazione del tutto empirica che lega tale sforzo alla concentrazione:

$$\sigma_2^{g-fric} = \frac{a_{fr}}{(c_o - c)^n} \quad 28b)$$

a_{fr} è una costante (non adimensionale) e c_o è una concentrazione di riferimento minore della concentrazione, c_* , di massimo impaccamento delle particelle. In un lavoro di poco successivo, gli stessi autori e Nott (Johnson *et al.*, 1989) propongono lo stesso modello per un moto granulare uniforme a superficie libera con una espressione per lo sforzo normale altrettanto arbitraria, ma leggermente diversa:

$$\begin{aligned} \sigma_2^{g-fric} &= a_{fr} \frac{(c - c_{min})^m}{(c_o - c)^n} \quad (c > c_{min}) \\ \sigma_2^{g-fric} &= 0 \quad (c \leq c_{min}) \end{aligned} \quad 29)$$

In questo caso viene ipotizzato che esista una concentrazione c_{min} al di sotto della quale lo sforzo frizionale si annulla.

Per risolvere il problema del regime frizionale Savage (1998) ha successivamente proposto un modello concettualmente molto più elaborato, che tuttavia non è esente da alcune assunzioni empiriche. Il modello è derivato in maniera rigorosa dalla reologia di un mezzo continuo comprimibile frizionale plastico. Alla fine tuttavia anche Savage restringe l'analisi ai moti piani, per i quali lo sforzo normale (di compressione) del regime frizionale viene espresso con una relazione di derivazione empirica non molto diversa dalla (29):

$$\sigma_2^{g-fric} = a_o \log \frac{c_\infty - c_o}{c_\infty - c} \quad 30a)$$

Lo sforzo tangenziale totale del regime granulare risulta pertanto essere:

$$\tau_{12}^g = (AD)^{1/2} \left[a_o \log \frac{c_\infty - c_o}{c_\infty - c} + c \rho_s (1 + 2c_s g_o) d_p K \frac{\partial u_1^g}{\partial x_2} \right] \quad 30b)$$

Il primo termine tra le parentesi quadre rappresenta lo sforzo tangenziale frizionale, il secondo termine lo sforzo collisionale. Si noti che l'espressione è assai simile al termine di pressione granulare espresso dalla (14a) e dalla (14b), le differenze sono dovute al fatto che Savage considera il moto di dischi (cilindri con l'asse nella direzione x_3), inoltre al posto della temperatura granulare compare il gradiente della velocità, ipotesi che (eq. 23) comporta l'aver trascurato il termine diffusivo nell'equazione dell'energia (eq. 19). Per la funzione di distribuzione radiale Savage adotta una relazione leggermente diversa dalla (16) (sempre perché egli tratta cilindri e non sfere), ma che come la (16) tende $+\infty$ per $c \rightarrow c_\infty$. È utile sottolineare infatti che, come fa osservare l'autore, l'eq. (30a) ha il pregio che per $c \rightarrow c_\infty$ i due termini tra parentesi divergono, ossia il primo tende a $-\infty$ ed il secondo a $+\infty$.

Oltre a questi schemi nella letteratura ne sono stati successivamente presentati altri, magari formalmente diversi da questi, ma che tuttavia si basano sempre su relazioni empiriche che non si discostano in maniera sostanziale da quelle qui citate.

3.1.2 Il modello GDR MIDI

Un modello reologico che combina il modello coulombiano ed il modello collisionale è stato proposto recentemente dal gruppo GDR MiDi (Groupement De Recherche Milleux Divisés) (GDR MiDi, 2004). Il modello è stato pensato per fluidi granulari in assenza di fluido interstiziale, ma non c'è ragione di ritenere che non possa essere esteso anche a flussi granulari con fluido interstiziale pesante (Cassar, 2005; Berzi and Jenkins, 2010)

Il modello è stato elaborato con riferimento a moti piani quasi unidirezionali, si basa sull'osservazione che anche nel regime collisionale, se si trascura la componente diffusiva nel bilancio energetico, il rapporto tra lo sforzo normale e lo sforzo tangenziale tende a divenire costante alle alte concentrazioni.

Il modello è stato giustificato (GDR MiDi, 2004) sulla base di ragionamenti di scala, ma può essere derivato con alcuni semplici passaggi, immaginando che lo sforzo tangenziale del regime coulombiano e quello del regime collisionale siano raccordabili con una funzione liscia e monotona, come nella successiva equazione:

$$\tau_{12}^g = \tan \phi p^g + (\tan \phi_c - \tan \phi) p^g \frac{\tau_{12}^{g-coll}}{\tau_{12}^{g-coll} + a} \quad (31)$$

In questo modo nel regime frizionale ($\tau_{12}^{g-coll} \rightarrow 0$) si ottiene $\tau_{12}^g \rightarrow p^g \tan \phi$ e nel regime collisionale ($\tau_{12}^{g-coll} \gg a$) si ottiene $\tau_{12}^g \rightarrow p^g \tan \phi_c$.

L'ultimo rapporto della (31) può essere ricalcolato, osservando che dalla (25) si ottiene:

$$\frac{\tau_{12}^{g-coll}}{p^{g-coll}} = \frac{f_2}{f_1^{0.5}} \sqrt{\frac{p^g}{p^{g-coll}}} \frac{d_p \dot{\gamma}}{\sqrt{p^g / \rho_s}} = \frac{f_2}{f_1^{0.5}} \sqrt{\frac{p^g}{p^{g-coll}}} I \quad (32)$$

Il parametro $I = d_p \dot{\gamma} / \sqrt{p^g / \rho_s}$ è detto *parametro inerziale* e rappresenta il rapporto tra due scale temporali (GDR MiDi, 2004): una scala microscopica $d_p / \sqrt{p^g / \rho_s}$ che rappresenta il tempo necessario ad una particella per cadere in uno spazio vuoto di dimensione d_p sotto l'azione della pressione p^g ; ed una scala macroscopica proporzionale alla velocità di deformazione locale $\dot{\gamma}$.

Sostituendo la (32) nella (31) si ottiene:

$$\frac{\tau_{12}^g}{p^g} = \tan \phi^{fric} + (\tan \phi^{coll} - \tan \phi^{fric}) \frac{I}{I + I_o} \quad (33)$$

Dove si è posto $I_o = a \frac{f_1^{0.5}}{f_2} \sqrt{\frac{p^{g-coll}}{p^g}}$. Nel regime frizionale ($I \ll 1$ e

$p^{g-coll} \ll p^g$) il termine I_o è piccolo e nella relazione (33) ha poco peso, ma anche nel regime collisionale ($I \gg 1$ e $p^{g-coll} \sim p^g$) se esso è minore dell'unità (Figura 4) ha poco peso. Appare ragionevole pertanto porlo costante e minore di 1.

La relazione (33) rappresenta appunto la reologia proposta dal gruppo GDR MiDi. In effetti, la relazione non è mai scritta esplicitamente in funzione delle tangenti degli angoli di attrito, ma semplicemente in funzione di due coefficienti di attrito, che tuttavia le rappresentano.

Si noti anche che la relazione (33) non è sufficiente per risolvere il problema, perché è necessario fornire anche la relazione reologica relativa allo sforzo normale.

Gli autori hanno cercato di dare una formulazione tridimensionale dell'eq. (33), tuttavia allo stato attuale non ci sono verifiche della validità di questa legge al di fuori di moti piani sensibilmente unidirezionali.

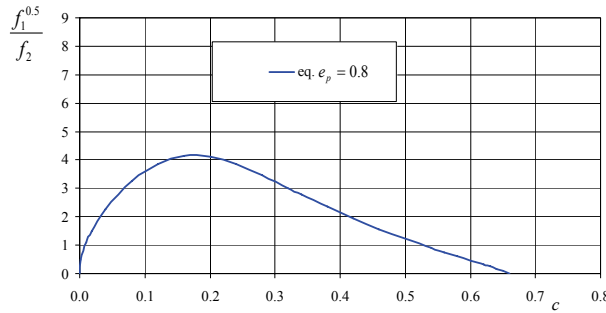


Figura 4. Dipendenza del rapporto $f_1^{0.5}/f_2$ dalla concentrazione, nell'ipotesi di Produzione = Dissipazione nel bilancio dell'energia con $e_p = 0.8$.

Inoltre manca comunque una relazione che fornisca la concentrazione.

A questo proposito gli autori, con una certa arbitrarietà, hanno assunto una relazione lineare di derivazione puramente empirica tra concentrazione e parametro inerziale I :

$$c = c_{\max} - (c_{\max} - c_{\min})I \quad 34$$

c_{\max} è la concentrazione corrispondente al regime coulombiano puro, mentre c_{\min} dovrebbe corrispondere al regime collisionale: si capisce come quest'ultimo valore, non essendo costante, sia soggetto ad una certa arbitrarietà. Gli autori restringono tuttavia il campo di applicabilità delle relazioni all'intervallo: $c_{\max} = 0.6$ e $c_{\min} = 0.4$. Anche questa legge potrebbe essere giustificata sulla base di una legge di raccordo liscio tra i valori estremi della concentrazione, pesato sul rapporto tra gli sforzi in maniera analoga all'eq.(33).

3.2 Moto uniforme di miscugli di acqua e particelle non coesive

Nell'ipotesi di moto uniforme nella direzione longitudinale x_1 , le equazioni della quantità di moto delle due fasi in questa direzione divengono rispettivamente:

$0 = -\rho_w(1-c)g \frac{\partial z}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{12}^f}{\partial x_2} + F_1$	35a)
$0 = -\rho_s c g \frac{\partial z}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{12}^g}{\partial x_2} - F_1$	35b)

Per cui eliminando la forza di interazione F_1 tra le due equazioni si ottiene:

$\frac{\partial \tau_{12}^g}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{12}^f}{\partial x_2} = (\rho_s c + \rho_w(1-c))g \frac{\partial z}{\partial x_1}$	36)
---	-----

Se la concentrazione delle particelle è sufficientemente elevata, il secondo termine a sinistra di solito è considerato trascurabile rispetto al primo. Stante la condizione di moto uniforme con gradienti di pressione nulli nella direzione del moto, la forza di interazione tra le fasi, che peraltro non compare nella (36), contiene solo il termine di resistenza idrodinamica (eq. 5).

Ripetendo la stessa operazione nella direzione normale x_2 si ottiene invece:

$0 = -\rho_w(1-c)g \frac{\partial z}{\partial x_2} - \frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_2^f}{\partial x_2} + c \frac{\partial p}{\partial x_2}$	37a)
$0 = -\rho_s c g \frac{\partial z}{\partial x_2} - \frac{\partial p^g}{\partial x_2} - c \frac{\partial p}{\partial x_2}$	37b)

Eliminando $\partial p / \partial x_2$ tra le due equazioni si ottiene:

$\frac{\partial p^g}{\partial x_2} + \frac{c}{1-c} \frac{\partial \sigma_2^f}{\partial x_2} = (\rho_s - \rho_w)cg \frac{\partial z}{\partial x_2}$	38)
--	-----

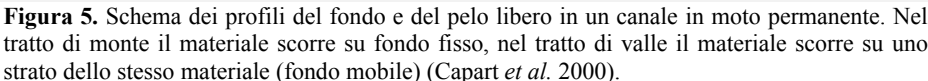
Anche in questa equazione il secondo termine a sinistra è di solito considerato trascurabile rispetto al primo (in moto uniforme esso può essere rappresentato solo da uno sforzo di Reynolds), mentre la forza di interazione tra le fasi contiene solo il termine dell'equazione (5) relativo al gradiente delle pressioni della fase fluida in direzione normale.

Se si trascura il termine dello sforzo turbolento nella (37a), questa si riduce, per $c = \text{cost}$, alla distribuzione idrostatica delle pressioni della fase fluida in direzione normale.

In definitiva si può scrivere:

$\frac{\partial \tau_{12}^g}{\partial x_2} = \left(1 + c \frac{\rho_s - \rho_w}{\rho_w}\right) \rho_w g \frac{\partial z}{\partial x_1}$	39a)

39b)



In queste condizioni con una tecnica di analisi di immagine basata sul metodo dei poligoni di Voronoï (Capart *et al.* 2002, Spinewine *et al.* 2003) sono state misurate le distribuzioni lungo la normale di velocità, di concentrazione e di temperatura granulare. Contemporaneamente venivano misurati portata liquida e solida e tirante.

Il materiale granulare era costituito da sfere composte da una mistura di solfato di bario e diossido di titanio, con un diametro $d_p = 6$ mm e di densità relativa $\rho_s/\rho_w = 2.21$.

Poiché l'andamento delle velocità su fondo mobile presenta un andamento asintotico decrescente a zero, in particolare la quota del fondo veniva identificata come la quota nella quale la velocità era mediamente pari all'1% della velocità massima.

Nella stessa canaletta si sono anche analizzati moti a superficie libera nel tratto su fondo fisso. Durante gli esperimenti si sono osservate quattro tipologie di moto:

- Flusso granulare soprassaturo su letto di materiale sciolto (fondo mobile). Il materiale solido tende a scorrere in prossimità del fondo e si osserva la formazione di una regione al di sotto della superficie libera nella quale la presenza di particelle è solo occasionale (Figura 6 a).
- Flusso granulare saturo (maturo) su letto di materiale sciolto (moto su fondo mobile). Le particelle sono dislocate lungo tutta la profondità della corrente con una concentrazione monotonicamente decrescente dal fondo verso la superficie libera (Figura 6 b).
- Flusso granulare sottosaturo su letto di materiale sciolto (moto su fondo mobile) in questo caso la concentrazione delle particelle solide è tale per cui la mistura nella parte superiore del campo di moto è insatura. Si è osservata in questo caso la presenza di uno strato di particelle ad alta concentrazione che si muove con deformazione trascurabile (plug flow) (Fraccarollo *et al.*, 2007) (Figura 6 c).
- Flusso granulare su parete rigida. È il caso in cui il letto di materiale sciolto non si forma. Se la costante di restituzione elastica degli urti tra particelle e parete è maggiore di quella tra particella e particella, si forma una regione a ridosso della parete nella quale la concentrazione delle particelle è minore di quella degli strati immediatamente superiori e tende ad aumentare al crescere della distanza dalla parete (gradienti di concentrazione inversi) (Figura 6 d).

Nel seguito verrà descritta solo la situazione del flusso granulare maturo (Figura 6 b).

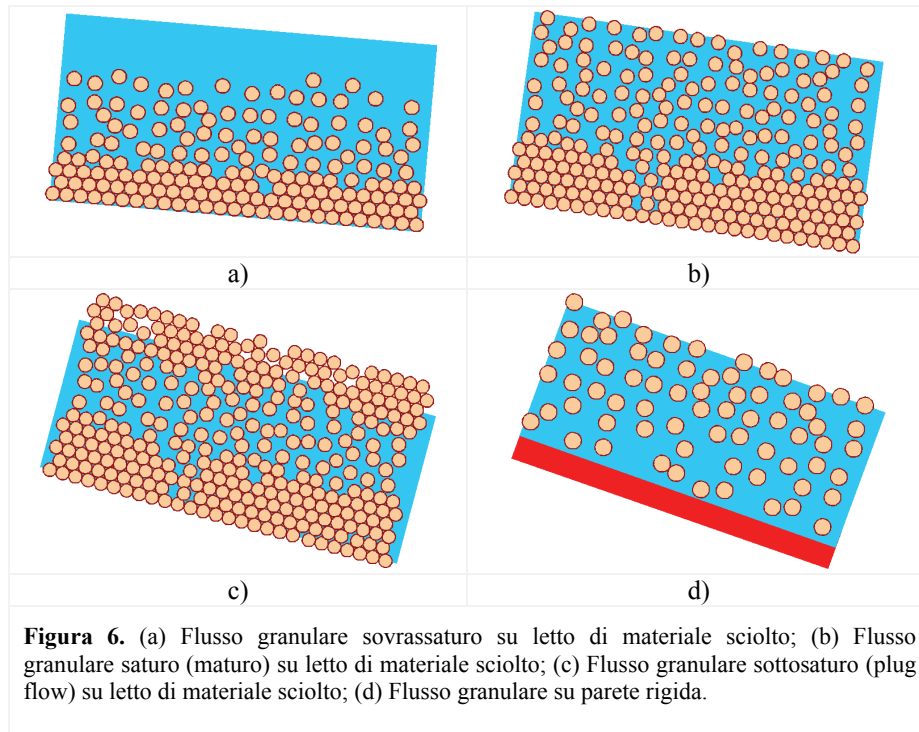


Figura 6. (a) Flusso granulare sovrassaturo su letto di materiale sciolto; (b) Flusso granulare saturo (maturo) su letto di materiale sciolto; (c) Flusso granulare sottosaturo (plug flow) su letto di materiale sciolto; (d) Flusso granulare su parete rigida.

3.3.1 Stratificazione dei regimi frizionale e collisionale ed intermittenza tra i due regime

Nel flusso granulare maturo i risultati sperimentali hanno sempre mostrato l'esistenza di due strati sovrapposti. Uno strato inferiore, con concentrazioni di volume elevate e visibilmente dominato da contatti prolungati e pertanto riconducibile al regime frizionale, ed uno strato superiore con concentrazioni più basse, dominato da urti istantanei tra le particelle e corrispondente al regime collisionale.

Si è anche osservato (Armanini *et al.*, 2009) che alle concentrazioni più elevate alcune particelle riuscivano a staccarsi dalla massa delle altre particelle con traiettorie al di sopra della superficie libera (regime balistico).

Nella

Figura 7 sono riportati i profili misurati della velocità e della temperatura granulare.

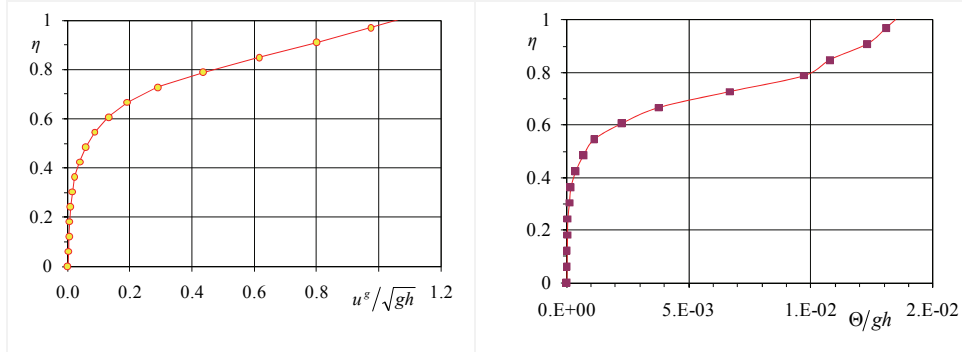


Figura 7. Andamento della velocità longitudinale e della temperatura della fase granulare.

Osservazioni recenti (Armanini *et al.*, 2009) hanno messo in evidenza come la separazione tra gli strati non sia netta, ma soggetta ad un fenomeno di intermittenza analogo a quello che nello strato limite di parete liscia si presenta tra il sottostrato viscoso e il sottostrato di turbolenza di parete. La funzione di intermittenza Ω è stata definita come la percentuale del tempo in cui la temperatura granulare si mantiene al di sopra di un valore di soglia che può essere considerato come tipico del regime collisionale.

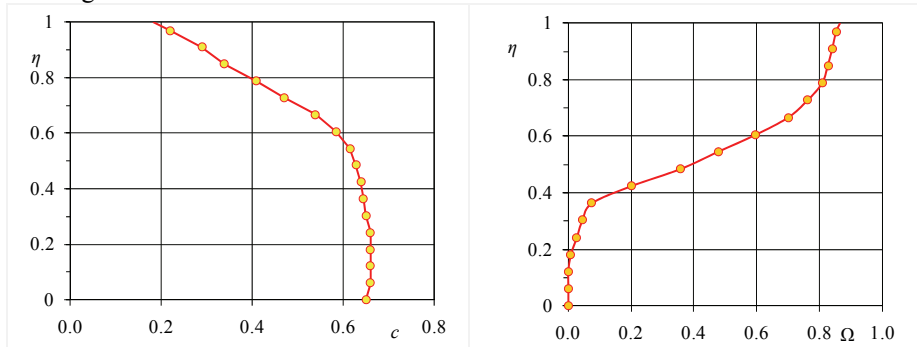


Figura 8. Andamento delle concentrazioni della fase granulare e della funzione di intermittenza tra il regime collisionale e quello frizionale.

La funzione di intermittenza Ω (Figura 8, grafico di destra) è stata misurata con una tecnica di campionamento condizionato dei segnali delle componenti fluttuanti della velocità delle particelle, su registrazioni sufficientemente lunghe. Lo strato di intermittenza si realizza in una regione del campo di moto in cui il numero di Stokes, ovvero il rapporto tra l'inerzia di una particella e la forza viscosa a cui è soggetta, è compreso tra 5 e 10.

3.3.2 Sforzi collisionali e sforzi frizionali

Le misure sperimentali hanno consentito la ricostruzione (Figura 9) dei diversi termini che compaiono nei bilanci degli sforzi (equazioni (39a) e (39b)). In particolare nella figura è riportato l'andamento degli sforzi granulari corrispondenti alla fase collisionale calcolati con le equazioni (14a) – (18b), nelle quali si sono sostituiti i valori misurati di concentrazione, temperatura granulare e velocità, nonché l'andamento degli sforzi legati all'azione della gravità (*sforzi esterni* - termini a destra delle due suddette equazioni).

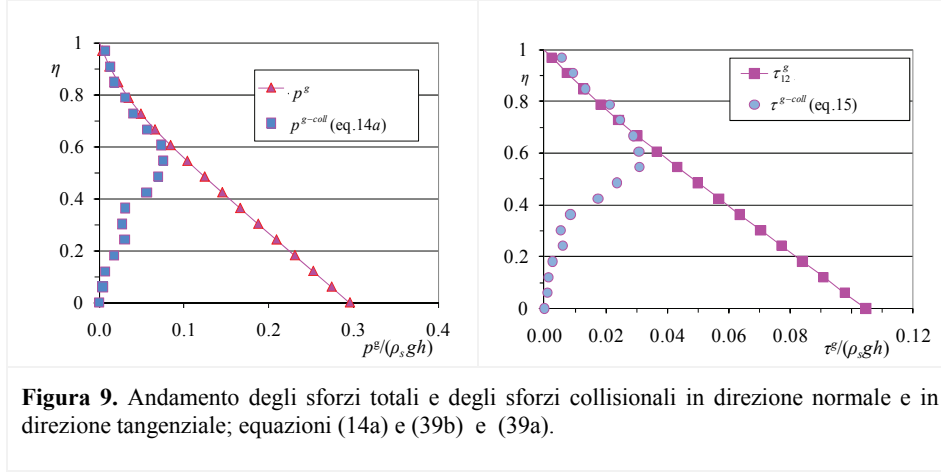


Figura 9. Andamento degli sforzi totali e degli sforzi collisionali in direzione normale e in direzione tangenziale; equazioni (14a) e (39b) e (39a).

Dalla figura si evince che le espressioni relative agli sforzi collisionali ricavate dalle teorie cinetiche bilanciano molto bene le forze gravitazionali nella regione esterna, confermando sia la bontà di questi modelli per interpretare il regime collisionale, sia la correttezza delle ipotesi di poter trascurare gli sforzi legati alla turbolenza della fase fluida nell'ambito dei limiti degli esperimenti. Confermano altresì che avvicinandosi al fondo cresce l'importanza degli sforzi granulari di natura frizionale, i quali in prossimità del fondo divengono dominanti. Come si è detto questa fase di transizione tra i due regimi è dominata dall'intermittenza.

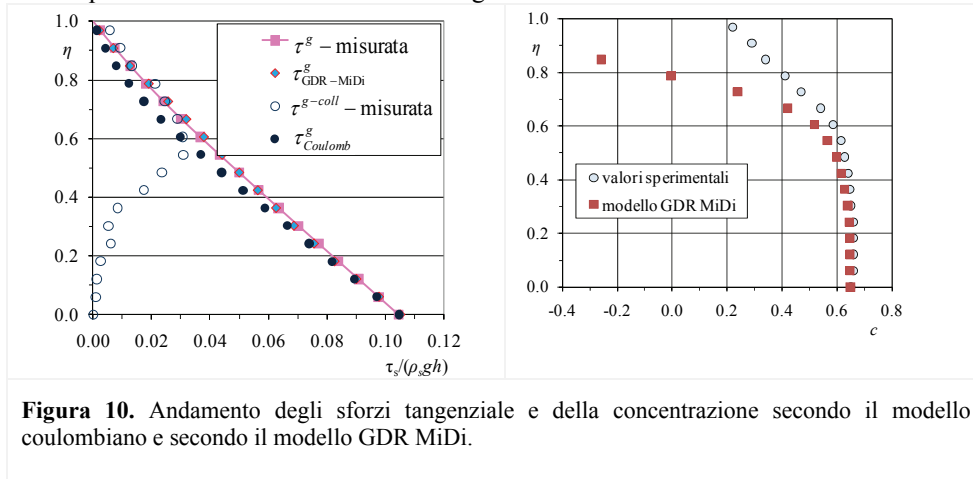


Figura 10. Andamento degli sforzi tangenziale e della concentrazione secondo il modello coulombiano e secondo il modello GDR MiDi.

Si è cercato quindi di verificare la bontà del modello GDR MiDi, espresso dall'eq. (33). I valori dei tre parametri che compaiono nell'eq. (33) sono stati in questo caso assegnati in modo che la formula interpolasse al meglio i dati sperimentali (Figura 10). I valori ottimali di questi parametri sono risultati essere: $\tan \phi^{fric} = 0.353$, $\tan \phi^{coll} = 0.618$ e $I_o = 0.5$. Si è notato tuttavia che il risultato è abbastanza sensibile al valore di questi 3 parametri, il primo dei quali è una proprietà del materiale misurabile in laboratorio, il secondo è ricavabile delle teorie cinetiche per $c \rightarrow c^*$ (vedasi anche la Figura 3), il terzo è invece alquanto arbitrario.

Nella stessa Figura 10 (diagramma di sinistra) è riportato l'andamento degli sforzi calcolato sulla base del semplice modello coulombiano, $\tau_{Coulomb}$, calcolato con un coefficiente di attrito costante, pari a quello che si ha sul fondo, ossia $\tan \phi^{fric} = 0.353$. Si vede come anche questo modello del tutto inadatto al regime collisionale fornisce un risultato quantitativamente accettabile. Questo significa che effettivamente lo schema puramente coulombiano, come aveva bene intuito Bagnold, vada bene anche per il regime collisionale, ma con un coefficiente di attrito maggiore del regime statico ($\tan \phi^{coll} = 0.618$). Questo risultato spiega anche come il modello GDR MiDi, che come si è visto può essere interpretato con uno schema coulombiano ma con un coefficiente di attrito raccordato tra i due regimi, dia dei risultati così buoni, ma mette anche in luce la debolezza concettuale di tale modello.

Nel diagramma di destra della Figura 10, sono riportati gli andamenti delle concentrazioni misurate e di quelle calcolate secondo il modello GDR MiDi (eq. 34). Anche in questo caso si è scelto il valore della c_{max} in modo da renderla coincidente con quella misurata in prossimità del fondo, mentre si è lasciato il valore della $c_{min} = 0.4$ suggerito da Forterre e Pouliquen (2008). Il modello dà risultati accettabili appunto all'interno dell'intervallo $c_{max} - c_{min}$, mentre per concentrazioni più basse il modello fornisce addirittura valori negativi di concentrazione. Il tentativo di diminuire la concentrazione minima di riferimento porta risultati ancora peggiori.

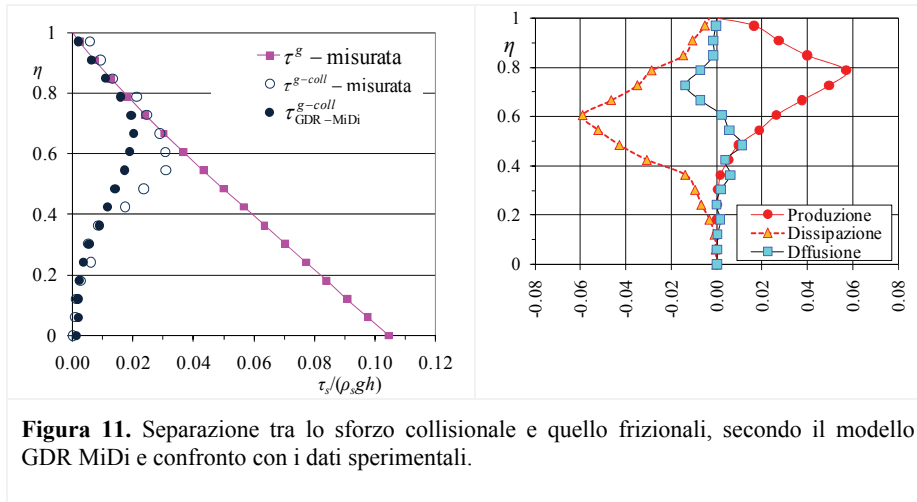
Relativamente agli sforzi tangenziali, si è cercato di separare nel modello GDR MiDi la componente collisionale da quella frizionale, riscrivendo l'eq. (33) nel seguente modo:

$\frac{\tau_{12}^g}{p^g} = \frac{I_o}{I + I_o} \tan \phi^{fric} + \frac{I}{I + I_o} \tan \phi^{coll}$	40)
---	-----

Il primo termine a destra è ragionevolmente attribuibile al regime frizionale, il secondo termine a quello collisionale, anche se va detto che gli autori non hanno mai dato del loro modello una simile interpretazione.

Nel grafico di sinistra della Figura 11 è riportato il risultato di questa operazione. Si vede che lo sforzo collisionale così calcolato (secondo termine a

destra dell'eq. 40), $\tau_{\text{GDR-MiDi}}^{g-coll}$ nel grafico, riproduce abbastanza bene lo sforzo collisionale (calcolato sulla base delle teorie cinetiche utilizzando le misure sperimentali) alle estremità, ossia nel regime pienamente collisionale e in quello pienamente frizionale. Se ne discosta nella fascia intermedia: la ragione di ciò può essere ricondotta anzitutto all'arbitrarietà del modello, ma anche al fatto che in questa fascia sono importanti i termini diffusivi del bilancio nell'energia (grafico a destra della Figura 11), la cui presenza rende il rapporto tra sforzi tangenziali e sforzi normali nel regime collisionale non più dipendente dalla sola concentrazione.



In conclusione si può dire che, pur nella sua semplicità concettuale, il modello GDR MiDi fornisce risultati buoni nei moti quasi uniformi per quanto attiene agli sforzi tangenziali, a condizione che la distribuzione delle concentrazioni sia valutata in forma corretta. Nei confronti qui riportati, infatti, si è sempre usata la distribuzione delle concentrazioni misurata.

Il modello dà risultati meno buoni per quanto riguarda le concentrazioni; la stima corretta delle concentrazioni è peraltro essenziale e l'incertezza di questa stima rappresenta un punto debole del modello. I lavori del gruppo GDR MiDi hanno tuttavia il pregio non marginale di aver individuato il parametro inerziale I come il parametro adimensionale significativo della transizione tra il regime collisionale e quello frizionale.

3.3.3 Ulteriori osservazioni sullo schema GDR MiDi

Alla luce di queste considerazioni si potrebbe immaginare di applicare il modello GDR MiDi liberandolo di alcune semplificazioni, anzitutto quelle relative alla fase collisionale. Ripartendo dalla relazione (3) lo sforzo collisionale può essere calcolato con le sole teorie cinetiche senza ulteriori semplificazioni, alla stessa maniera del modello di Savage (1998) (eq. 30b), mentre lo sforzo frizionale può essere calcolato, come nel modello GDR MiDi (eq. 40), con lo

schema coulombiano nel quale l'angolo di attrito viene fatto dipendere dal parametro inerziale I . Si ottiene così la seguente relazione:

$$\tau_{12}^g = \tan \phi^{fric} \frac{I_o^2}{I_o^2 + I^2} p^g + \tau_{12}^{g-coll} \quad (41)$$

A differenza dello schema originale GDR MiDi, qui si propone di utilizzare il quadrato del parametro inerziale I . Si giunge a questa conclusione se nella deduzione della relazione (31) si omettono alcune delle semplificazioni, derivate dall'aver trascurato il termine diffusivo nel bilancio dell'energia. Un approccio di questo genere è giustificabile, considerando che quando la concentrazione si riduce, il numero dei punti di contatto tra le particelle diminuisce per cui si riduce anche l'angolo di attrito.

Un procedimento analogo può essere fatto anche per lo sforzo normale:

$$p^g = p^g \frac{I_o^2}{I_o^2 + I^2} + p^{g-coll} \quad (42a)$$

che, con alcune manipolazioni, porta alla seguente:

$$p^{g-coll} = p^g \frac{I^2}{I_o^2 + I^2} \quad (42b)$$

L'espressione è strutturalmente simile a quella proposta da Armanini *et al.* (2009) alla luce dell'analisi dell'intermittenza tra i regimi. Nella **Figura 12** è riportato un confronto tra le eq. (41) e (42b), nelle quali si è posto $I_o = 0.12$, e i valori misurati.

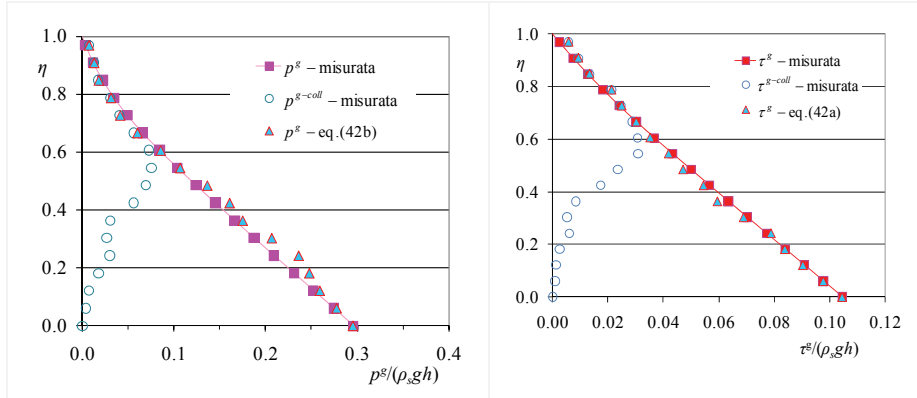


Figura 12. Andamento degli sforzi normali e degli sforzi tangenziali in base al modello espresso dalle eq. (41) e (42b).

Il pregio di questo nuovo approccio è soprattutto nel fatto che la concentrazione diviene una variabile dipendente del problema, superando così l'arbitrarietà del modello GDR MiDi su questo aspetto.

3.4 Formula integrale

In molte applicazioni, soprattutto quelle relative ai modelli matematici integrati sulla profondità, è sufficiente conoscere la relazione tra la velocità mediata sulla profondità del flusso e gli altri parametri locali del moto. In altre parole è sufficiente conoscere la formula di moto uniforme per le colate di detriti e per le correnti iperconcentrate su fondo mobile. È bene ricordare che questa relazione deve poter valere sia per le situazioni di alta concentrazione che interessano le colate nella parte superiore delle aste torrentizie, sia per le situazioni di basse concentrazioni, che caratterizzano invece le colate nella fase di arresto ed in particolare all'interno di alcune opere di difesa, quali le vasche di raccolta del materiale solido.

La relazione di moto uniforme è ottenibile in forma rigorosa dalla integrazione delle equazioni del moto (equazioni 36 e 38) e dalle relative relazioni reologiche. Una soluzione esatta di questo problema, anche nell'ipotesi che la concentrazione della fase granulare sia sufficientemente elevata da poter trascurare (in particolare nella eq. 36) gli sforzi della fase liquida, non è ancora oggi disponibile. Resta comunque aperto il problema di definire in maniera appropriata lo schema di chiusura per la fase fluida in presenza di concentrazioni elevate ma ancora molto minori di quella di massimo impaccamento. Si potrebbe immaginare in questo caso di adottare lo schema della lunghezza di mescolamento di Prandtl, opportunamente modificato per tener conto della presenza delle particelle, ma anche su questo punto non esiste ancora in letteratura una soluzione definitiva e convincente.

Un procedimento empirico può tuttavia essere tentato, considerando separatamente la formula di moto uniforme valida per i flussi granulari e quella valida per il moto fluido di parete scabra e combinandole opportunamente. Una proposta in questo senso è stata fatta recentemente da Armanini e Paris (2009), che hanno suggerito di combinare linearmente le formule scritte in termini della funzione di resistenza f di Darcy-Weisbach, attraverso una opportuna funzione peso dipendente dalla concentrazione.

Per l'acqua in parete scabra si è utilizzata un'espressione monomia simile alla formula di Strickler $f_o = a_1 (d_{50}/h)^m$, mentre per la fase granulare si è utilizzata l'espressione $f_{g-coll} = 8(25/4)(\lambda d_{50}/h)^2 a \sin \phi \rho_s / (\rho_w + C(\rho_s - \rho_w))$, derivata dalla teoria di Bagnold (Takahashi, 1991). C è qui la concentrazione mediata sul tirante.

La funzione di resistenza della fase liquida è stata pesata con una funzione empirica della concentrazione delle particelle per tener conto, anche indirettamente, dell'effetto della presenza delle particelle sulle scale della turbolenza della fase fluida. Gli esperimenti hanno mostrato che questa funzione peso è riducibile alla concentrazione (media) della fase liquida, ossia :

$$f_{colata} = f_o (1 - C) + f_{g-coll} \cdot C$$

Si ottiene così:

$$Fr = \sqrt{\frac{\sin \alpha}{a_1 \left(\frac{d_{50}}{h} \right)^{m_1} (1-C) + \frac{25 \left(\frac{\lambda d_{50}}{h} \right)^2}{\rho_w + C(\rho_s - \rho_w)} \frac{\rho_s \sin \phi}{\rho_w + C(\rho_s - \rho_w)}}} \quad (43)$$

Qui α è l'angolo di inclinazione della corrente in moto uniforme; h è il tirante della corrente; d_{50} è il diametro medio della distribuzione granulometrica del materiale; a_1 ed m_1 sono due parametri da determinare sperimentalmente.

È necessario ora specificare la modalità di calcolo per la concentrazione, che nei modelli matematici a fondo mobile rappresenta la seconda relazione di chiusura, ma che a differenza delle correnti fluviali, per le correnti iperconcentrate non è disaccoppiabile dalla formula di resistenza.

Poiché la meccanica del trasporto dei flussi granulari è sostanzialmente diversa da quella del trasporto fluviale, sono state proposte due diverse formulazioni, valide rispettivamente per il primo termine del radicando (trasporto solido di fondo) e per il secondo termine del radicando (trasporto di massa).

La legge di trasporto per i flussi granulari è facilmente ricavabile dalle relazioni di Bagnold (eq. 11), dopo avervi inserito le espressioni degli sforzi normali e di quelli tangenziali ottenuti, in moto uniforme, per integrazione sul tirante delle equazioni (36) e (38), nell'ipotesi che la concentrazione si mantenga costante pari a C . Si ottiene così (Takahashi, 1991):

$$C = \frac{\tan \alpha}{\frac{\rho_s - \rho_w}{\rho_w} (\tan \phi - \tan \alpha)} \quad (44a)$$

La relazione (44a) viene sostituita alla C che compare nel secondo termine del radicando, termine che per concentrazioni basse tende ad annullarsi. Per calcolare la concentrazione quando questa tende a divenire piccola (regime di trasporto solido di tipo fluviale), è possibile utilizzare un'espressione monomia, analoga a quella proposta da diversi autori (e.g. Graf e Suszka, 1987) per le correnti fluviali, del tipo:

$$C = \frac{a_2}{\left(\frac{\rho_s - \rho_w}{\rho_w} \right)^2 \left(\frac{h}{d_{50}} \right)^{m_2}} \sin^2 \alpha \quad (44b)$$

a_2 ed m_2 sono due parametri da determinarsi sperimentalmente.

La relazione (43), accoppiata alle relazioni (44a) e (44b), è stata validata con una serie di prove sperimentali nella stessa canaletta del Laboratorio di Idraulica dell'Università di Trento, utilizzando sia le sferette già impiegate nella sperimentazione precedentemente descritta, sia materiale naturale di una colata di detriti verificatasi in Trentino, privata della frazione più grossolana che nella composizione granulometrica originale era comunque in percentuale modesta.

La sperimentazione (Pinamonti, 2010) ha suggerito il seguente set di parametri:

$$a_1 = 0.067 ; \quad m_1 = 0.25 ; \quad a_2 = 23(\sigma_d / d_{50})^{0.1} ; \quad m_2 = 0.1 \quad 44b)$$

Dove σ_d rappresenta la deviazione standard della distribuzione granulometrica. Si noti che i primi due parametri sono in linea con alcune delle espressioni monomie suggerite in letteratura per calcolare la resistenza degli alvei fluviali fortemente scabri (Armanini, 2005).

Il confronto tra i dati sperimentali e l'eq. (43) è riportato nella Figura 13.

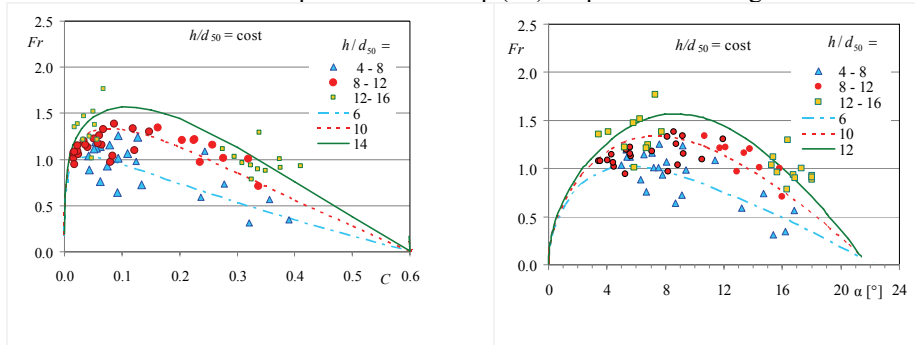


Figura 13. Confronto tra le espressioni (43), (44a) e (44b) e i dati sperimentali (Pinamonti, 2010).

Dalla figura si evince che:

- L'espressione (43), accoppiata all'equazione (44a) o alla (44b), mostra che la resistenza di moto uniforme di una colata può esser espressa come una relazione tra i tre seguenti parametri adimensionali ($Fr = U / \sqrt{gh_2} ; \alpha ; d_p / h$);
- Eliminando invece l'angolo α tra le stesse relazioni, la resistenza di una colata può anche essere espressa come una relazione tra i seguenti altri tre parametri adimensionali ($Fr = U / \sqrt{gh_2} ; C ; d_p / h$). Ovviamente le due formulazioni sono del tutto equivalenti;
- Per valori bassi della concentrazione ($C < \sim 0.1$) il numero di Froude cresce al crescere della concentrazione e al crescere dell'angolo di inclinazione del moto α ;
- Per valori maggiori della concentrazione ($C > \sim 0.1$) il numero di Froude invece decresce al crescere della concentrazione e al crescere dell'angolo di inclinazione del moto α , contrariamente a quanto invece accade per il moto di fluidi newtoniani su fondo fisso.

Quest'ultimo risultato non deve sorprendere. Al crescere dell'angolo di inclinazione cresce la concentrazione delle particelle, per cui nel regime collisionale cresce la resistenza interna al moto e di conseguenza il numero di Froude decresce.

BIBLIOGRAFIA

- Armanini, A., 1997. Problemi di Debris-flow nelle sistemazioni idrauliche. In: Nuovi Sviluppi Applicativi dell'Idraulica dei Corsi d'Acqua, in onore del Prof. Claudio Datei. Bressanone (BZ): p. 35-84.
- Armanini, A., 2005 a. *Principi di Idraulica fluviale*, Cosenza: Bios, 2005. p. 207. Seconda edizione
- Armanini, A., Fraccarollo, L. and Larcher, M., 2005 b. Debris Flow. In *Encyclopedia of Hydrological Sciences* (Anderson, M. G., Ed.) Chap. 142, Vol. 4(12), 2173–2186, John Wiley.
- Armanini, A., Capart, H., Fraccarollo, L. and Larcher, M., 2005 a. Rheological stratification in experimental free-surface flows of granular-liquid mixtures. *J. Fluid Mech.* 532 , 269–319.
- Armanini, A., Fraccarollo, L., Larcher, M., 2008. Liquid-granular channel flow dynamics. *Powder Technology*, 182: 218-227
- Armanini, A., Larcher, M., Fraccarollo, L., 2009. Intermittency of rheological regimes in uniform liquid-granular flows. *Phys. Rev. E* 79, 051306.
- Armanini, A., Paris, A. 2009. Global Relations for Liquid-granular Flows over Mobile Bed in a Wide Range of Slope Values. *32nd IAHR Congress*, Vancouver, August 9-14.
- Bagnold, R.A., 1954. Experiments on a gravity-free dispersion of large solid spheres in a Newtonian fluid under shear. *Proc. Roy. Soc. London A* 225: 49-63.
- Berzi, D. and Jenkins, J.T., 2008. A theoretical analysis of free-surface flows of saturated granular-liquid mixtures. *J. Fluid Mech.* 608, 393—410.
- Campbell, C. S., 1990, Rapid granular flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 22, 57-92.
- Capart, H., L. Fraccarollo,, L. Guarino, A., Armanini, Y. Zech., 2000. Granular temperature behaviour of loose-bed debris flows. In *Debris-Flow Hazards Mitigation: Mechanics, Prediction and Assessment*, G. F. Wieczorek & D. Naeser editors, A.A. Balkema, Rotterdam.
- Capart, H., D. L. Young, Y. Zech, 2002. Voronoï imaging methods for the measurement of granular flows. *Exp Fluids* 32, 121-135.
- Carnahan, N. F. & K. Starling, 1970. Equations of state for non-attracting rigid spheres. *Journal of Chemical Physics*, vol. 51, 635-636.
- Cassar, C. and Nicolas, M. and Pouliquen, O., 2005. Submarine granular flows down inclined planes. *Physics of Fluids*, 17, 103301.
- Chapman, S. & T. G. Cowling, The mathematical theory of non-uniform gases. Third edition, Cambridge University Press, 1971.
- Coussot, P., *Mudflow rheology and dynamics*, IAHR Monograph, Balkema, Rotterdam, 1977.
- Fraccarollo, L., Larcher, M. and Armanini, A., 2007, Depth-averaged relations for granular-liquid uniform flows over mobile bed in a wide range of slope values. *Gran. Matt.* 9, 145–157, 2007.
- Forterre, Y. and Pouliquen, O., 2008, Flows of dense granular media. *Ann Rev. Fluid Mech.*, 40, 1-24
- GDR MiDi, 2004. On dense granular flows. *Eur. Phys. J. E* 14, 341-365.
- Graf, W.H. and Suszka, L., 1987, Sediment Transport in Steep Channels, *J. of Hydrosiences and Hydr. Eng., Japan Soc. Civ. Eng.*, Vol. 5, No.1.

- Goldhirsch I., 2003. Rapid granular flows. *Ann. Rev. Fluid Mech.* 35:267-93.
- Haff, P.K., 1983, Grain flow as a fluid-mechanical phenomenon, *J. Fluid Mech.*, 134, 401-430.
- Hungr, O., 2005, Classification and terminology. In Jakob, M. and Hungr O., (Eds), in *Debris-flow hazards and related phenomena*, Springer Verlag, 9-23.
- Hunt, M.L., Zenit, R., Campbell, C.S. & Brennen, 2002. C.E. Revisiting the 1954 suspension experiments of R. A. Bagnold. *Journal of Fluid Mechanics* 452, 1-24.
- Iverson, R.M., 1997. *The physics of debris flows*, Review of Geophysics 35(3):245-296.
- Jenkins, J.T. and Richman, M.W., 1985, Kinetic theory for plane flows of a dense gas of identical, rough, inelastic, circular disks. *Physics of Fluids*, 28, 3485-3294.
- Jenkins, J. T. and Hanes, D. M., 1998. Collisional sheet-flow of sediment driven by a turbulent fluid, *J. Fluid Mech.*, Vol. 370, 29-52.
- Jenkins, J.T., and Savage S.B., 1983. A theory for rapid flow of identical, smooth, nearly elastic, spherical particles, *J. Fluid Mech.*, Vol. 130, 186-202.
- Johnson, P.C. & R. Jackson, 1987. Frictional-collisional constitutive relations for granular materials, with application to plane shearing. *J. of Fluid Mech.*, Vol. 176, 67-93.
- Johnson, P.C., Nott, P., and Jackson R., 1990. Frictional-collisional equations of motion for particulate flows and their application to chutes, *J. of Fluid Mech.*, Vol. 210, 501-535.
- Lun, C.K.K., Savage, S.B., Jeffrey, D.J. and Chepuriniy N., 1984, Kinetic theories for granular flow: inelastic particles in Couette flow and slightly inelastic particles in a general flow field. *J. Fluid Mech.*, , **140**, 223-256.
- Lun, C.K.K., Savage, S.B., Particle size segregation in inclined chute flow of dry cohesionless granular solids, *J. Fluid Mech.*, Vol. 189, 311-335.
- Larcher, M., 2004. *Vertical structure of high concentration liquid-granular flows*, Università degli Studi di Trento, vol. 2, p. 151. (disponibile online <http://portale.unitn.it/dr/ee/larcherdoctoralthesis.htm>)
- Meruane, C., Tamburrino, A. and Roche, O., 2010, On the role of the ambient fluid on gravitational granular flow dynamics. *J. of Fluid Mech.*, Vol. 648, 381-404.
- Pinamonti, V., 2010. *Meccanica delle colate di detriti: aspetti teorici ed applicativi*, Tesi di laurea specialistica in Ingegneria per l'ambiente e il territorio. Università degli Studi di Trento.
- Savage, S.B., 1983. Granular flows down rough inclines – review and extension. In Jenkins, J.T, and Stake, M. (Eds) *Mechanical of granular materials: new models and constitutive relations*, Elsevier, 261-282
- Savage, S.B. & D.J. Jeffrey, 1981. The stress tensor in a granular flow at high shear rates. *J.Fluid Mech.* 110, 255-272.
- Seminara, G. & Tubino, 1993. M., *Debris flows: meccanica, controllo e previsione*, Monografia del G.N.D.C.I..
- Spinewine, B., Capart, H., Larcher, M., Zech, Y.. 2003. Three-dimensional Voronoï imaging methods for the measurement of near-wall particulate flows. *Exp Fluids* 34, 227–241.
- Takahashi, T., 1991. *Debris flow*, IAHR Monograph. Rotterdam: Balkema, 1991.
- Truesdell, C., 1984, *Rational thermodynamics*. Springer-Verlag.